Απειροστικός 2 (Σαρογλου) 04/03/2019

Υπενθύμιση από Απ1: Αν $\{b_\kappa\}$ μια ακολουθία

$\lim_{\kappa \to \infty} b_\kappa = \ell > a \in \mathbb{R}$ τότε $\exists \kappa_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall \kappa \geq \kappa_0$ να ισχύει

$b_\kappa > a$ (ομοίως για $<a$)

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon = \ell - a$ (όταν $\ell < \infty$) $\exists \kappa_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall \kappa \geq \kappa_0$ $|\alpha_\kappa - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \kappa \geq \kappa_0$ $\underbrace{\ell - \varepsilon}_{= \alpha} < b_\kappa < \ell + \varepsilon$ $\forall \kappa \geq \kappa_0$

$b_\kappa > a$

Αν $\ell = +\infty$ θέτω $M = |\alpha| + 1$ $\exists \kappa_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall \kappa \geq \kappa_0$ να ισχύει $b_\kappa \geq M = 1 + |\alpha| \geq a$

Απόδειξη:
$\exists \kappa_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall \kappa \geq \kappa_0$ $\left|\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_\kappa}\right| > 1 \Rightarrow \forall \kappa \geq \kappa_0$ $|\alpha_{\kappa+1}| > |\alpha_\kappa| > |\alpha_{\kappa-1}|$

$> \dots > |\alpha_{\kappa_0}| > 0 \Rightarrow |\alpha_{\kappa+1}| \not\to 0 \Rightarrow |\alpha_\kappa| \not\to 0 \Rightarrow \alpha_\kappa \not\to 0 \Rightarrow$

αποκλίνει

Απόδειξη (τπο ρίζας ii)

$\exists \kappa_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall \kappa \geq \kappa_0$, $\sqrt[\kappa]{|\alpha_\kappa|} > 1 \Rightarrow \forall \kappa \geq \kappa_0$, $|\alpha_\kappa| > 1$
$\Rightarrow |\alpha_\kappa| \not\to 0 \Rightarrow \alpha_\kappa \not\to 0 \Rightarrow$ Αποκλίνει

~~Απόδειξη (τπο ρίζας i)~~
~~Έστω $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$, $\exists \kappa_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall \kappa \geq \kappa_0$, $\sqrt[\kappa]{|\alpha_\kappa|} > 1 \Rightarrow$~~

~~$\forall \kappa \geq \kappa_0$, $|\alpha_\kappa| \geq 1 \Rightarrow |\alpha_\kappa| \not\to 0 \Rightarrow \alpha_\kappa$~~

Απόδειξη της ρίζας i)

Έστω $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall k \geq k_0$ $\left|\sqrt[k]{|\alpha_k|} - \ell\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall k \geq k_0$ $\ell - \varepsilon < \sqrt[k]{|\alpha_k|} < \ell + \varepsilon \Rightarrow \forall k \geq k_0$

$\sqrt[k]{|\alpha_k|} < \ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2} = c < 1 \Rightarrow \forall k \geq k_0, \ |\alpha_k| < c^k$

$\sum_{k>0}^{\infty} c^k$ σ-συγκλίνει $\xrightarrow{\text{κριτ. σύγκρισης}} \sum_{k=k_0}^{\infty} |\alpha_k|$

Π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k}}_{\alpha_k}$ (δυναμοσειρά)

Εξετάζω την δυναμοσειρά ως προς την σύγκλιση με το κριτήριο Λόγου

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}/k+1}{x^k/k}\right| = \frac{k}{k+1}|x| \xrightarrow{k\to\infty} |x|$$

Αν $|x| < 1$ τότε συγκλίνει Απολύτως

Αν $|x| > 1$ τότε αποκλίνει

Αν $|x| = 1$ τότε αποτυγχάνει το κριτήριο λόγου

Αν $x = 1$, έχουμε την σειρά $\sum_{k>1} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

Αν $x = -1$ έχουμε $\sum_{k>1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

συγκλίνει αλλά όχι απολύτως

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$
- Συγκλίνει απολύτως αν $|x| < 1$
- Συγκλίνει υπό προϋποθέσεις (δηλ. συγκλίνει αλλά όχι απολύτως) αν $x = -1$
- Αποκλίνει αν $x = 1$ ή $|x| > 1$

Με κριτήριο ρίζας $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k\to\infty} |x|$

Αν $|x|<1$ συγκλίνει απολύτως
Αν $|x|>1$ αποκλίνει
Αν $|x|=1$ το κριτήριο ρίζας αποτυγχάνει
και ισχυει το ίδιο με πριν

π.χ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ - a_k

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{x^2}{\sqrt[k]{k^2}} \xrightarrow{k\to\infty} x^2$$

Αν $x^2<1 \Rightarrow |x|<1$ τοτε συγκλίνει απολύτως
Αν $x^2>1 \Rightarrow |x|>1$ τοτε αποκλίνει
Αν $x^2=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow x=-1$ τοτε το κριτήριο ρίζας αποτυγχάνει
Αν $|x|=1 \Rightarrow x=1 = x=-1$ τότε έχουμε την σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ που συγκλίνει απολύτως

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$ $\begin{cases} \text{συγκλίνει απολυτως αν } |x|\leq 1 \\ \text{αποκλίνει αν } |x|>1 \end{cases}$

Με ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{2k+2}}{(k+1)^2}}{x^{2k}/k^2}\right| = x^2 \cdot \frac{k^2}{(k+1)^2}$

$\xrightarrow{k\to\infty} x^2$

Αν $x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1$, τοτε συγκλίνει απολυτα
Αν $x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1$, αποκλίνει
Αν $x^2=1 \Leftrightarrow |x|=1$, τότε τα κριτήρια λόγου αποτυγχάνουν

(4/3/19
Σαρογλου)

Λήμμα (Άθροιση κατά μέρη)

$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g'(x)dx + f(b)g(b) - f(a)g(b)$

Έστω $\{a_k\}, \{b_k\}$ δύο ακολουθίες
Ορίζουμε $S_k = a_1 + \dots + a_n$. Τότε, για $1 \le m < n$
$S_0 = 0$

$$\boxed{\sum_{n=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k-1}) + S_n b_n - S_{m-1} b_m}$$

μόνο για την αποδ γενικά sos!!!

Απόδειξη

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{n=m}^{n} (S_n - S_{n-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} S_k b_n - \sum_{k=m} S_{n-1} b$$

$$= \sum_{k=m}^{n} S_k b_k - \sum_{v=m-1}^{n-1} S_v b_{v+1} = \sum_{k=m}^{n} S_k b_k - \sum_{n=m-1}^{n-1} S_k b_{k+1}$$

$$= \left(\sum_{k=m}^{n-1} S_k b_k + S_n b_n \right) - \left(\sum_{k=m}^{n-1} S_k b_{k+1} + S_{m-1} b_m \right)$$

$$= \sum_{k=n}^{n-1} S_n (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n - S_{m-1} b_m$$

Κριτήριο Dirichlet: Έχεις δύο ακολουθίες $\{a_k\}, \{b_k\}$
δύο ακολουθίες με:
i) $b_k \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_k \xrightarrow{n \to \infty} 0$, b_k φθίνουσα
ii) Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n = a_1 + \dots + a_n$
είναι φραγμένη. Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

Επειδή $0 \le b_k \to 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall k \ge k_0$ $b_k < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\left| \sum_{k=m} a_k b_k \right|$ Από (ii) $\exists M > 0$, τω $\forall n \in \mathbb{N}$ $|S_n| \le M$

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| = \left| \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n - S_{m-1} b_m \right| \quad n > m \ge k_0$$

(4/3/2019
Σπυρόγλου)

$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |S_n(b_k - b_{k+1})| + |S_n b_n| + |S_{m-1} b_m| \leq$

$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |M(b_k - b_{k+1})| + M|b_n| + M|b_m|$

$= M \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + Mb_n + Mb_m = M(b_m - b_n) + Mb_n + Mb_m =$

$= 2Mb_m < \varepsilon$

$\sum_{k=m}^{n-1} (b_m - b_{k+1}) = (b_m - \cancel{b_{m+1}}) + (\cancel{b_{m+1}} - \cancel{b_{m+2}}) + \dots + (\cancel{b_{n-2}} - \cancel{b_{n-1}}) + (\cancel{b_{n-1}} - b_n)$

$= b_m - b_n$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u> (Κριτήριο Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές)

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k,\ b_k \geq 0$ έστω ότι:

i) $b_k \to 0$

ii) $\{b_k\}$ φθίνουσα. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ συγκλίνει

<u>Αποδ</u> $a_k = (-1)^{k+1}$, $b_k = b_k$

$S_n = a_1 + \dots + a_n = 0$ ή $1 \to 0$ ή $1 \to \{S_n\}$ φραγμένη $\xrightarrow{\text{κρ Dirichlet}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + (-1) = 0$

$S_3 = 1 + (-1) + 1 = 1$

$S_4 = 0$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$

~~αρα ... $\{S_n\}$ φραγμένη~~

<u>π.χ</u> $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \underbrace{\frac{1}{k^p}}_{= b_k}$, $p > 0$ Εναλλάσσουσα

$0 \leq b_k$, $b_k \to 0$ $\{b_k\}$ φθίνουσα $\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$ συγκλίνει

(όχι απολύτως όταν $0 < p \leq 1$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, $\{b_k\}$ φθίνουσα και συγκλίνουσα ακολουθία. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k$ συγκλίνει

Αν $\alpha_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε Αν $b_k \to b \Rightarrow \frac{\alpha_k b_k}{\alpha_k} = b_k \to b$

$\xrightarrow[\text{κριτήριο σύγκρισης}]{\text{οριακό}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k$ συγκλίνει

∧ επειδή

Απόδειξη (παράδειγμα 2)

$\sum^{\infty} \alpha_k (b_k - b)$ Επίσης $S_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \in \mathbb{R}$

$b_k - b \geq 0$

$b_k - b$ φθίνουσα $\Rightarrow \{S_n\}$ φραγμένη

$\xrightarrow[\text{Dirichlet}]{\text{κριτήριο}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (b_k - b)$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (b_k - b) + \sum_{k=1}^{\infty} b \alpha_k$ συγκλίνει

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k$

Δυναμοσειρές: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ • Συγκλίνει πάντα για $x = 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k$ (για $y = x - x_0$: $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k$)

ΠΡΟΤΑΣΗ: 1) Αν $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k$ συγκλίνει για $x = y$, τότε

συγκλίνει απόλυτα, $\forall y \in \mathbb{R}$ με $|x| < |1|$

ii) Αν $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ αποκλίνει για $x=y$, τότε αποκλίνει

$\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x|>|y|$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> i) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k$ συγκλίνει $\Rightarrow \alpha_k y^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$

$\Rightarrow |\alpha^k y^k| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall k \geq k_0$

$|\alpha^k y^k| < 1$

$|\alpha^k \cancel{y^k}| \overset{y \neq 0}{=\!=} |\alpha_k \frac{x^k}{y^k}| |y^k| = |\alpha_k y^k| \left|\frac{x}{y}\right|^k < \left|\frac{x}{y}\right|^k$, $\forall k \geq k_0$ άνω

$\left|\frac{x}{y}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} \left|\frac{\cancel{x}}{y}\right|^k$ συγκλίνει $\xRightarrow{\quad}$

Κριτ. σύγκρισης

$\sum_{k=k_0}^{\infty} |\alpha_k x^k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k x^k|$ συγκλίνει

ii) Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| \geq |y|$. Έστω ότι $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$

συγκλίνει

Τότε $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k x^k|$ συγκλίνει απόλυτα (από το (i)), άτοπο

Ονομάζω $R = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \text{ συγκλίνει}\}$

Αν $R = \infty$, τότε $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, τω $|x| < |y|$ κ'

$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα

ΠΡΟΤΑΣΗ i) Αν $\sum^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει για $x=y$, τότε συγκλίνει απόλυτα, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x|<|y|$

ii) Αν $\sum^{\infty} a_k x^k$ ~~συγκλίνει για $x=0$ και αποκλίνει $\forall x \neq 0$~~

~~Αν $R \in (0,+\infty)$~~. αποκλίνει για $x=y$, τότε αποκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x|>|y|$

Αν $R=0$, τότε $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει για $x=0$ και αποκλίνει $\forall x \neq 0$

Αν $R \in (0,+\infty)$: Αν $x \in (-R,R)$, τότε $\sum_{k=0} a_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα: Έστω $x \in (-R,R)$. Τότε $\exists y \in \mathbb{R}$ με $|y|>|x|$ τ.ω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ να συγκλίνει $\xrightarrow{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα. Έστω $x \in (-R,R)$ Τότε $\exists y \in \mathbb{R}$, με $|y|<|x|$ τ.ω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ να συγκλίνει $\xrightarrow{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $\sum a_k x^k$ αποκλίνει

- Αν $|x|=R$ δεν έχουμε καμία πληροφορία

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Υπάρχει (ακτίνα σύγκλισης) $R \in [0,+\infty]$ τ.ω $\forall x \in (-R,R)$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα. Επίσης, $\forall x \in (-\infty,R) \cup (R,+\infty)$ η σειρά αποκλίνει. Επίσης αν $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$ (ορίζουμε: $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$) και

αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \ell$, τότε $R = \frac{1}{\ell}$

<u>Απόδ</u> Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k x^k}_{b_k}$

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |x| \xrightarrow{k\to\infty} \ell|x|$$

Αν $\ell|x| < 1$ συγκλίνει απολύτως. Αν $\ell = 0$ $\ell|x| = 0 < 1 \Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{κρ. λόγου}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$ ($R = \infty$)

Αν $\ell = \infty$, τότε $\ell|x| = \infty$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει $\forall x \neq 0$ ✓

Αν $\ell \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απόλυτα αν $\ell|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\ell}$

-||- αποκλίνει αν $\ell|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\ell}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k+1}$$

$$\sqrt[k]{\left|\frac{x^{2k+1}}{k+1}\right|} = \sqrt[k]{\frac{|x|^{2k}|x|}{k+1}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[k]{|x|}}_{\to 1 \text{ όταν } x \neq 0} |x|^2 \to \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ |x|^2 & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Αν $|x| < 1 \to$ Συγκλίνει απόλυτα

Αν $|x| > 1 \Rightarrow$ Αποκλίνει

$\Rightarrow R = 1$

Αν $|x|=1$:

$x=1$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

$x=-1$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{k+1}$ αποκλίνει